

相関計測 森永@ils/uec

冷却原子での相関計測等についても触れたものは

http://m.ils.uec.ac.jp/memo/correlation_YITP.pdf

にあります。量子光学についての標準的な教科書は

Rodney Loudon 「光の量子論」 第2版 (1994/06) 内田老鶴園

0 コヒーレント状態

消滅演算子の固有状態のことをコヒーレント状態という：

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (1)$$

$U_\alpha \equiv \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)$ と定義し ($U_\alpha^\dagger = U_{-\alpha} = U_\alpha^{-1}$ に注意) 実変数 s について $f(s) = U_{\alpha s}^\dagger a U_{\alpha s}$ とおくと $f'(s) = U_{\alpha s}^\dagger [a, \alpha \alpha^\dagger - \alpha^* a] U_{\alpha s} = \alpha$ なので $f(s) = f(0) + \alpha s = a + \alpha s$ つまり

$$U_\alpha^\dagger a U_\alpha = f(1) = a + \alpha \quad (2)$$

$a U_\alpha |0\rangle = U_\alpha U_\alpha^\dagger a U_\alpha |0\rangle = U_\alpha (a + \alpha) |0\rangle = \alpha U_\alpha |0\rangle$ であるから (グローバル位相の不定性を除けば)

$$U_\alpha |0\rangle = |\alpha\rangle \quad (3)$$

となる。

A と B は演算子で交換子 $[A, B]$ は A, B と交換するとする。 $g(s) = e^{sA} B e^{-sA}$ とおくと $g'(s) = e^{sA} [A, B] e^{-sA} = [A, B]$ 、 $g(0) = B$ だから $e^{sA} B e^{-sA} = g(s) = B + s[A, B]$ である。 $h(s) = e^{-\frac{1}{2}s^2[A, B]} e^{sA} e^{sB}$ とおくと

$$\begin{aligned} h'(s) &= -s[A, B]h(s) + Ah(s) + e^{\frac{1}{2}s^2[A, B]} e^{sA} B e^{sB} \\ &= (A + B)h(s) \end{aligned} \quad (4)$$

だから $h(s) = e^{s(A+B)}$ となり

$$e^{A+B} = h(1) = e^{-\frac{1}{2}[A, B]} e^A e^B \quad (5)$$

$A = \alpha a^\dagger$ 、 $B = -\alpha^* a$ とおくと $-\frac{1}{2}[A, B] = -\frac{1}{2}|\alpha|^2$ なので

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= U_\alpha |0\rangle \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a} |0\rangle \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n a^{\dagger n}}{n!} |0\rangle \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \end{aligned} \quad (6)$$

1 2光子相関実験の背景

Hanbury Brown と Twiss(以下 HBT) によって行われた 2 光子相関の実験 [1] について復習しておく。最も単純化された実験系は光源とそこから来る光子を受ける検出器から成る (図 1a)。光は弱く検出器は高感度かつ高速応答とすると検出される信号は図 1b のように光子一つ一つに対応するパルス列となる。こうして得られたパルスの時系列からパルスを 2 つ取り出すすべての組み合わせについてそのパルスの時間間隔 τ を測りヒストグラム $G^{(2)}(\tau)$ を作る。 $G^{(2)}(\tau)$ は $\tau = 0$ の近傍を除き平坦だが、熱的光源の場合 $\tau = 0$ の周りで $G^{(2)}(\tau)$ は盛り上がりその幅は典型的には光のスペクトル幅の逆数程度である (図 2 参照)。微小な τ に対して $G^{(2)}(\tau)$ が相対的に大きな値を持つということは光子が検出された直後は再び光子が検出される確率が高いということを意味する。系の光子数が確定している状態では 1 つ目の光子が検出されると光子数は 1 減る

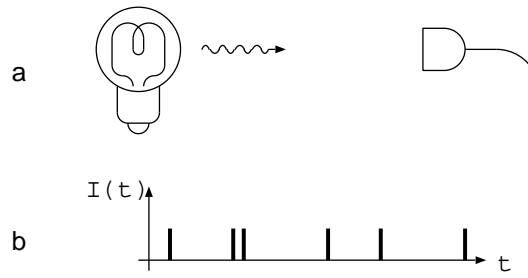


図 1: a. 光源で発生した光子は検出器で検出される。b. 検出器に光子が入射する毎にパルスが発生する。

ので検出確率が上がるというのは奇妙に感じられるかも知れないが、光子数が統計的または量子論的に適当に定まっていない状態では起こり得ることである。光子が検出されない時間が続くと光子数が多い可能性が排除されていく一方、光子が検出されると一転「案外光は強いのかも」となるわけだ¹。

1.1 カオス的光

ランプや恒星が出している熱的光のモデルとして次のようなものを考える：光電場は光源を構成する原子それぞれからの寄与の和 $E(t) = \sum_i E_i(t)$ で書け、すべての原子は等価で異なる原子による電場 $E_i(t)$ 、 $E_j(t)$ ($i \neq j$) の間に位相相関はないとする。また同一原子による電場も時間差がある値 τ_c より大きければ位相相関はないと仮定する (τ_c は原子間の平均衝突時間や励起状態の自然寿命等で決まる)。

ここでいくつかの記号の定義をしておく：

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (7)$$

$E(t)$ は実関数なので $\tilde{E}^*(\omega) = \tilde{E}(-\omega)$ 。

$$\begin{cases} E^{(+)}(t) \equiv \int_0^{\infty} \tilde{E}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ E^{(-)}(t) \equiv \int_{-\infty}^0 \tilde{E}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \end{cases} \quad (8)$$

$E^{(+)}(t)$: 正の周波数成分

$E^{(-)}(t)$: 負の周波数成分

$$E^{(+)}(t)^* = E^{(-)}(t),$$

$$E(t) = E^{(+)}(t) + E^{(-)}(t)$$

検出器の応答速度は光の振動サイクルよりはずっと遅いので検出量は振動サイクルで平均化された強度 $I(t) = E^{(-)}(t)E^{(+)}(t)$ であり、

$$\begin{aligned} G^{(2)}(\tau) &= \langle I(t)I(t+\tau) \rangle_t \\ &= \langle |E^{(+)}(t+\tau)E^{(+)}(t)|^2 \rangle_t \\ &= \sum_i \langle |E_i^{(+)}(t+\tau)E_i^{(+)}(t)|^2 \rangle_t \\ &\quad + \sum_{i>j} \langle |E_i^{(+)}(t+\tau)E_j^{(+)}(t) + E_j^{(+)}(t+\tau)E_i^{(+)}(t)|^2 \rangle_t \\ &= N g^{(2)}(\tau) + N(N-1) \{ I_0^2 + |g^{(1)}(\tau)|^2 \} \\ &\approx N^2 \{ I_0^2 + |g^{(1)}(\tau)|^2 \} \end{aligned} \quad (9)$$

¹量子的な例としては、状態 $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |N\rangle)$ ($N \neq 0$) の光子数の期待値は $\frac{N}{2}$ だが 1 つ光子が検出されると状態は $|N-1\rangle$ に移り期待値は $N-1$ に ($N > 2$ ならば) 増える。

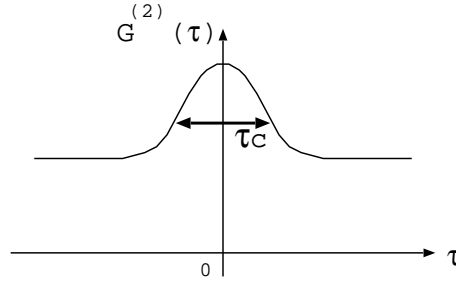


図 2: カオス的光では $G^{(2)}(\tau)$ は $\tau = 0$ で裾野での値の 2 倍の値を取り、またその膨らみの幅は τ_c 程度である。

ここで $\langle A(t) \rangle_t$ は t に依存する量 $A(t)$ の t による平均、 $g^{(2)}(\tau) \equiv \langle I_i(t)I_i(t+\tau) \rangle_t$ 、 $I_0 \equiv \langle I_i(t) \rangle_t$ 、 $g^{(1)}(\tau) \equiv \langle E_i^{(-)}(t)E_i^{(+)}(t+\tau) \rangle_t$ 、また N は全原子数で $N \gg 1$ を仮定した。 $g^{(1)}(0) = I_0$ であり一方 $\tau > \tau_c$ なら $g^{(1)}(\tau) = 0$ なので $G^{(2)}(0) = 2G^{(2)}(\tau)$ ($\tau > \tau_c$) がわかる (図 2)。

1.2 $G^{(2)}(\tau)$ の性質 (古典論)

$G^{(2)}(\tau)$ は光強度 $I(t)$ を使って $G^{(2)}(\tau) = \langle I(t)I(t+\tau) \rangle_t$ と書け 2 次の相関関数と呼ばれる。さらに $I: t \mapsto I(t)$ 、 $I_\tau: t \mapsto I(t+\tau)$ として $G^{(2)}(\tau) = \langle I, I_\tau \rangle$ のように内積で書けば不等式 $G^{(2)}(0) \geq G^{(2)}(\tau)$ が成り立つのは明らかである。ただし $\tau = 0$ のときの $G^{(2)}(\tau)$ の値については少し注意が必要である。 τ が有限の場合は $G^{(2)}(\tau)$ に寄与する事象はある時刻 t_1 に 1 つの光子が検出され時刻 $t_2 = t_1 + \tau$ にもう 1 つの光子がされるという事象で、この場合 t_1 と t_2 で検出された光子は同一では有り得ない。しかし $G^{(2)}(\tau) = \langle I(t)I(t+\tau) \rangle_t = \langle I, I_\tau \rangle$ と書いた場合の $G^{(2)}(0)$ には 1 つ目の光子と 2 つ目の光子として 1 つの検出事象を 2 重にカウントしているものも含まれており、これが上記の不等式が常に成立する所以でもある。この 2 重カウントは物理的には次節のように検出器を 2 つ用意し相互相関を取ることによって、また数式上では後述するように光電場の量子化を行ない $I(t)I(t+\tau)$ を正規順序積 $: I(t)I(t+\tau) :$ に置き換えることによって回避できる。

1.3 実際的な実験系

実際の光検出器は光子を検出したあと次の検出まで不感時間 (最近の APD で 35ns 程度) があるため短い相関時間領域が測定できない。そこで検出器を 2 つ用意しそれらの信号の相互相関 $\langle I_1(t)I_2(t+\tau) \rangle_t$ を取るのが一般的である (図 3a)。ただしこの場合図 3b のように原子 i, j から出た光子がどのように検出器 1、2 に入るかによって光路長差 Δl (この配置では $\Delta l \approx \frac{dD}{L}$) が生じるため (9) は

$$G^{(2)}(\tau) = N g^{(2)}(\tau) + N(N-1) \{ I_0^2 + |g^{(1)}(\tau)|^2 \langle \cos \frac{2\pi\Delta l}{\lambda} \rangle \} \quad (10)$$

と書き直される (λ は光の波長)。このため $\Delta l \gtrsim \lambda$ だと $\langle \cos \frac{2\pi\Delta l}{\lambda} \rangle \approx 0$ となり強度干渉 ($G^{(2)}(\tau)$ の原点付近の膨らみ) が現れない。なおこの性質を利用して、検出器の間隔 d を変えながら恒星からの光を受けることにより恒星の視直径 ($\frac{D}{L}$) を決定することが HBT の実験のそもそもの目的であった [2]。光学の実験では光をビームスプリッター (BS) で 2 本に分け鏡像の位置に置かれた 2 つの検出器に導くことにより検出器間の距離 d を実効的に 0 にすることが一般に行われる (図 4a)。ただしこの場合も受光面の大きさが光路長差をつくる要因となる。

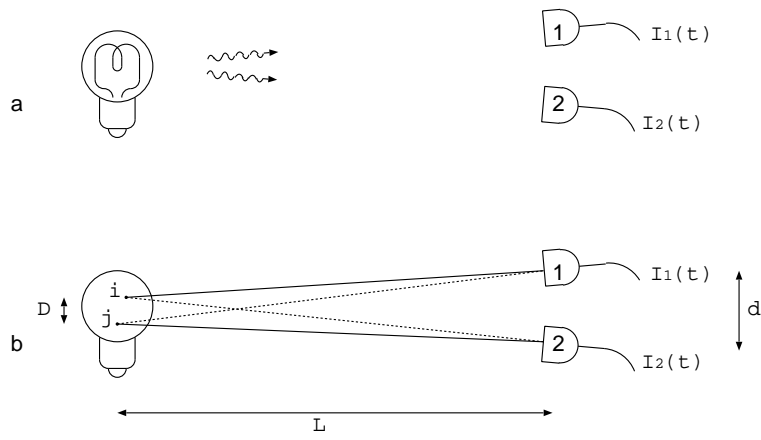


図 3: a. 光源で発生した光子を 2 つの検出器で受ける。b. 2 つの光子が 2 つの検出器で一つずつ検出される 2 つの組み合わせ (実線と点線) で光路長差が生じる。

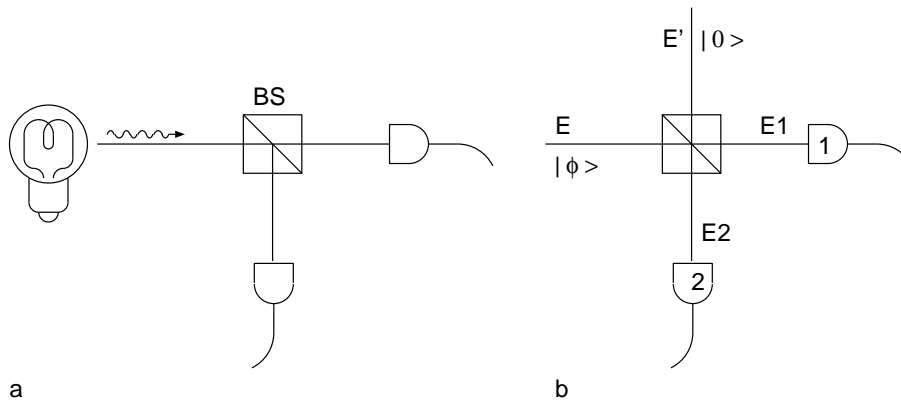


図 4: a. 光を BS で 2 つに分ける。b. BS の左から信号光が、上からは”真空”が入ってくる。

1.4 2光子計測の量子論

既に述べたように強度相関を表わす量 $I(t)I(t+\tau)$ には古典論では $\tau = 0$ のとき 2 光子の検出による寄与と 1 光子検出を 2 重にカウントしていることによる寄与が混ざっている。量子論においては正規順序積 $:I(t)I(t+\tau):$ が 2 光子相関を表わす量として用いられる。何故か。まず変形

$$\langle :I(t)I(t+\tau): \rangle = \langle E^{(-)}(t)E^{(-)}(t+\tau)E^{(+)}(t+\tau)E^{(+)}(t) \rangle = |E^{(+)}(t+\tau)E^{(+)}(t)|^2$$

から明らかなようにこれは 2 光子が吸収されたことに対応する量である。もう少し詳しく見るために $\tau = 0$ でも 2 光子が関与していることが明白な検出器が 2 つある場合を考える (図 4)。この場合 $I_1(t)$ と $I_2(t+\tau)$ は交換するので積の順序の問題も生じない。電場が BS によって受けるユニタリー変換は

$$\begin{cases} U_{BS}^\dagger E_1 U_{BS} = \sqrt{T}E + \sqrt{R}E' \\ U_{BS}^\dagger E_2 U_{BS} = -\sqrt{R}E + \sqrt{T}E' \end{cases}$$

である (T, R は BS の強度透過率と強度反射率)。BS の左から入る信号光を $|\phi\rangle$ (上からは”真空” $|0\rangle$ が入る) とすると検出器に入る光の状態は $U_{BS}|\phi\rangle|0\rangle$ であり強度相関信号は

$$\begin{aligned} G^{(2)}(\tau) &= \langle \phi | \langle 0 | U_{BS}^\dagger I_1(t) I_2(t+\tau) U_{BS} | \phi \rangle | 0 \rangle \\ &= \langle \phi | \langle 0 | U_{BS}^\dagger : I_1(t) I_2(t+\tau) : U_{BS} | \phi \rangle | 0 \rangle \\ &= RT \langle \phi | E^{(-)}(t) E^{(-)}(t+\tau) E^{(+)}(t+\tau) E^{(+)}(t) | \phi \rangle \\ &= RT \langle \phi | : I(t) I(t+\tau) : | \phi \rangle \end{aligned}$$

となって正規順序を取った積が対応していることがわかる。なおこの計算から光路での光子の損失や検出器の量子効率が $G^{(2)}(\tau)$ の形に影響を与えないことも見て取れるだろう。

1.5 光子や原子の状態の例

ここでは既出のカオスの光以外の状態の例をいくつか挙げる。

1.5.1 コヒーレント状態

レーザーに対応するとされるコヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ では $G^{(2)}(\tau)$ は定数である: $G^{(2)}(\tau) = \langle \alpha | : I(t) I(t+\tau) : | \alpha \rangle = |\alpha|^4$ 。これは状態が時間並進に対して不変であるという性質からくるのではなく、コヒーレント状態が消滅演算子の固有状態であり光子検出事象が光子状態を変えないため 2 つの光子検出過程が互いに影響を及ぼさないことによるものである。

なお原子においても熱的原子線と「原子レーザー」での強度相関の比較実験が行われており前者では $\tau = 0$ 近傍で正の相関が見られるのに対し後者ではどの時間領域でも相関が見られない [3]。

1.5.2 単一原子、単一量子ドットが放出する光

単一エミッタが発する光を相関計測すると $G^{(2)}(0)$ がほぼ 0 まで落ち込む。これは単一エミッタにおいては光子が放出された直後には系は基底状態にあり次の光子を放出するには再び励起状態に上がる必要があるため一定の時間がかかることによる。この性質を利用して $G^{(2)}(0)$ の値から光があたっている原子・量子ドットの個数を見積もったり $G^{(2)}(\tau)$ のくぼみの幅から励起速度を求めることができる。

1.5.3 熱的原子線

量子縮退状態にない熱的原子線ではボソンの場合はカオスの光の場合と同じく $G^{(2)}(0) = 2G^{(2)}(\tau)$ ($\tau > \tau_c$) のパンチングが見られる一方統計性の違いからフェルミオンの場合は $G^{(2)}(0) = 0$ となると考えられる。

参考文献

- [1] R. Hanbury Brown and R. Q. Twiss, *Nature* **177**, 27 (1956).
- [2] R. Hanbury Brown and R. Q. Twiss, *Nature* **178**, 1046 (1956).
- [3] A. Öttl, S. Ritter, and M. Köhl and T. Esslinger, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 090404 (2005), A. G. Manning, S. S. Hodgman, R. G. Dall, M. T. Johnsson, and A. G. Truscott, *Optics Express* **18**, 18712 (2010).