

講義の資料の置き場：  
<http://m.ils.uec.ac.jp/qem/>

## 0 レーザー冷却とは

レーザー冷却とはレーザー（光）を使って中性原子を真空中で減速、冷却、捕捉する技術。原子と光子が運動量を交換することによって実現される。

中性原子以外ではイオンや最近では微小構造体にも応用される。

### 0.1 原子分光【レーザー冷却法考案の動機】

原子分光の目標：原子のエネルギー準位を（光を使って）究極の精度で決定する

何のために？

- 物理の基本法則の検証
  - 5年おきくらいにノーベル物理学賞が与えられている分野
  - 研究者は（固体物理とかと比べると）そんなに多くない

役に立つ？

- （レーザーの発明）
- 究極の精度の時計（原子時計）
  - GPS
  - 宇宙探査

原子のエネルギー準位を決定する上での障壁

原子は結構な速度で飛び回っている（室温で数  $100m/s$  くらい）

- ドップラーシフト（速度に比例）
- 2次のドップラーシフト（速度の2乗に比例・相対論的效果）
- 観測時間からくるエネルギー幅（transit time broadning：通過時間幅）
  - $\Delta E \sim \hbar/\Delta t$

原子を真空中で止まった状態で捕まえておけば解決する レーザー冷却しよう！

## 0.2 レーザー冷却の応用

- 原子レーザー（コヒーレントな原子源）
- 量子情報（捕捉した原子を量子情報の担い手として用いる）
  - 量子計算機
  - 量子シミュレータ
- 原子干渉計（光干渉計の光を原子波に置き換えたもの）
  - 超高感度加速度計
    - \* 重力定数  $G$  の精密測定
    - \* 資源探査
  - 超高感度ジャイロセンサ
    - \* Lense Thirring 効果の観測（重力磁気 慣性系の引き摺り）
    - \* ナビゲーション（ミサイル！潜水艦！）
  - 重力波検出

## 1 レーザー冷却

### 1.1 光子の吸収放出による原子の運動量変化

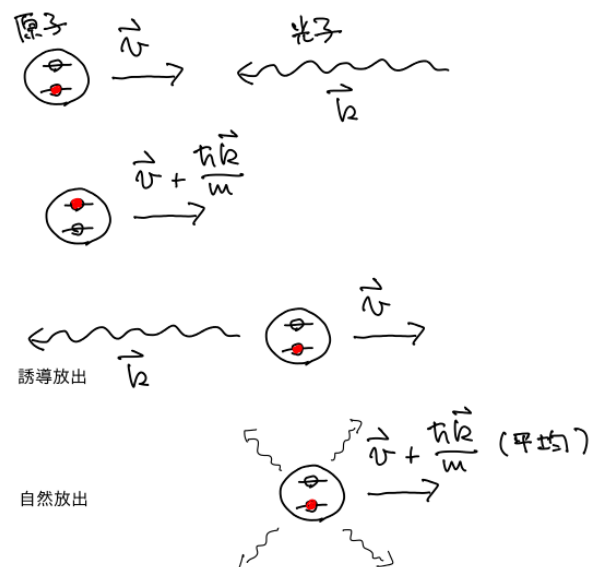


図 1: 原子による光子の吸収放出

【光の吸収】: あるモードの光を吸収する確率はそのモードの光子数  $n$  に比例する（つまり光強度に比例）。

【光の放出】: あるモードに光を放出する確率はそのモードの光子数  $n$  とすると  $n + 1$  に比例する。そこで光強度に比例する " $n$ " の部分と光子が 0 でもおきる " $0$ " の部分に便宜上分けて前者を「誘導放出」後者を「自然放出」と呼ぶ。

【光子の運動量】: 波数  $k$  の光子は運動量  $p = \hbar k$  を持つ。  $|p| = \hbar|k| = \hbar\omega/c$ 。原子が光子を吸収放出する際はこの運動量が光子と原子の間でやりとりされる。

【2 準位原子】: 基底状態にある原子に共鳴光をあてると励起状態に遷移し自然放出、誘導放出によって基底状態に戻る（中間状態に遷移したりしない）というサイクルをモデル化した原子。基底状態と励起状態の 2 つの状態（準位）を持つ。

(2 準位) 原子に共鳴光 (波数  $k$ ) をあてる。[ 基底状態の原子 光子の吸収 (原子: 励起状態) 光子の放出 (原子: 基底状態) ] という吸収放出のサイクルを考えると、自然放出がおきるごとに原子の速度が  $\hbar k/m$  だけ変化する。

光の強度が十分強ければ原子が基底状態と励起状態にいる確率は半々。励起状態にいる原子は毎秒  $\Gamma$  の速度で光子を放出する。原子は毎秒  $\Gamma/2$  回自然放出を行なう。従って原子が光から受ける最大加速度は

$$a = \frac{\hbar k}{2m} \Gamma \quad (1)$$

## 2 減速

光の角周波数 (実験室系) を  $\omega_0$  としたときに原子が感じる角周波数  $\omega$  はドップラーシフトにより

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{v_{\parallel}}{c}\right) \quad (2)$$

ただし  $v_{\parallel}$  は原子の速度  $v$  の光の方向 (波数  $k$  の方向) 成分。例えば室温原子を速度 0 近くまで減速するには光子の吸収放出を 1 万回程度繰り返す必要があるが、減速開始時に共鳴していた光も減速が進むとドップラーシフトが変化するために共鳴から外れて減速が止まってしまう。これを避けるための方法として減速に伴ってレーザー周波数を変化させる chirp 法とドップラーシフトの変化を Zeeman シフトで補償する方法がある。

### 2.1 Zeeman 効果

原子に磁場  $B$  (向きは  $z$  方向とする) を加えると原子の角運動量  $J_z$  に応じてエネルギー変化が生じる (Zeeman 効果):

$$\Delta E = \mu_B g J_z \quad (3)$$

( $\mu_B$  は Bohr 磁子、 $g$  は Lande の  $g$  ファクタと呼ばれる係数)。

このように Zeeman 効果によるエネルギーシフトは磁場に比例する。一方 (1) で与えられる一定加速度 (「減速」度)  $a$  で運動する原子の位置と速度の関係を求めると  $v = v_0 - at$ 、 $z = z_0 - at^2/2$  から

$$v - v_0 = -\sqrt{2a(z - z_0)} \quad (4)$$

となり磁場は位置の関数として放物線状に変化させればよいことがわかる。

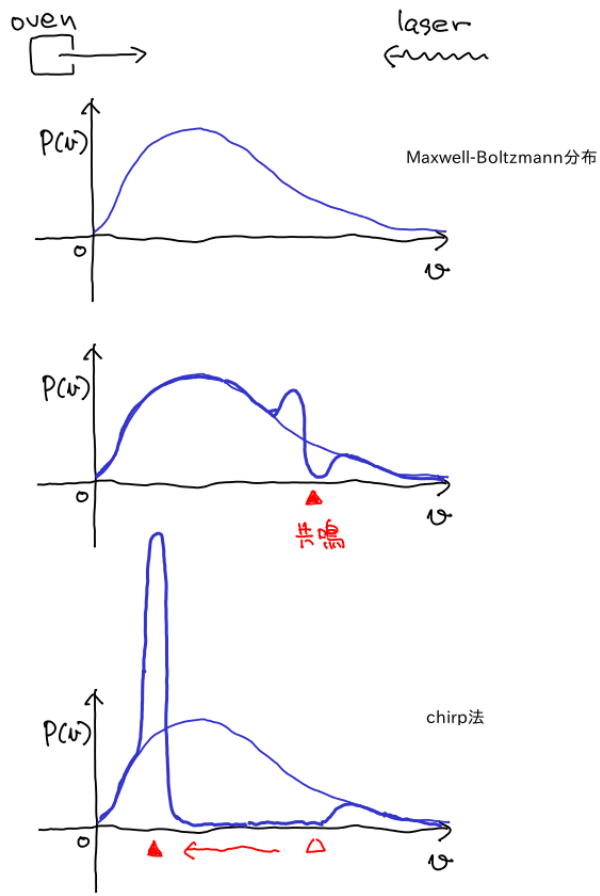


図 2: 原子の減速

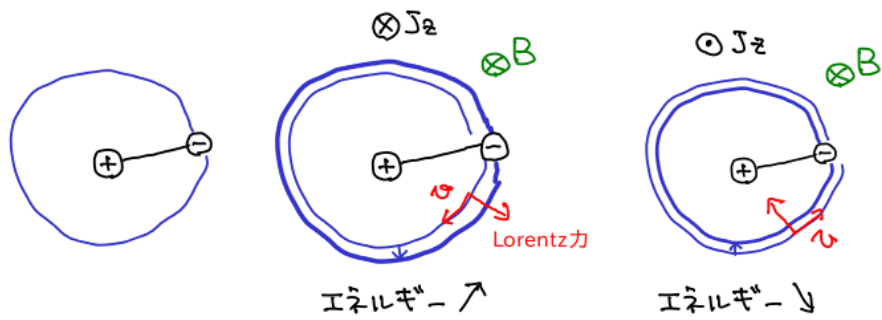


図 3: Zeeman 効果



図 4: Zeeman 同調法

### 3 光モラセス

まず 1 次元方向の運動を考える。対向するレーザー光を原子にあてる。光の周波数は共鳴より少し負に離調 (共鳴より低くする) しておく。原子はドップラー効果により自身の運動方向に対向して入射するレーザー光の周波数のほうをより高く (従って共鳴に近く) 感じ従って主に吸収するため冷却されていく。

このときの冷却速度を見積もってみる。角振動数  $\omega$  の光があたっているときに自然放出がおきる頻度を  $\gamma(\omega)$  とする。時間  $\Delta t$  の間におきる速度変化 (の期待値) は

$$\Delta v = \frac{\hbar k}{m} \left\{ -\gamma \left( \omega \left( 1 + \frac{v}{c} \right) \right) + \gamma \left( \omega \left( 1 - \frac{v}{c} \right) \right) \right\} \Delta t = -2 \frac{\hbar k}{m} \gamma'(\omega) \omega \frac{v}{c} \Delta t \quad (5)$$

なので原子の運動エネルギーのエネルギー変化  $\Delta E_{cooling}$  は

$$\Delta E_{cooling} = \Delta \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = m v \Delta v = -4 \frac{\hbar k^2}{2m} \frac{1}{2} m v^2 \gamma'(\omega) \Delta t = -\frac{4}{\hbar} E_{recoil} E_{kinetic} \gamma'(\omega) \Delta t \quad (6)$$

ここで  $E_{recoil}$  は反跳エネルギー (静止した原子が光子を 1 つ吸収または放出したときに持つ運動エネルギー)、 $E_{kinetic} = m v^2 / 2$  は原子の運動エネルギーである。なので  $E_{kinetic}$  が下がるのに従って冷却速度は低下する。

光モラセスを 3 次元に拡張するには光のバランスを取りながら様々な方向から光を入れればいい。例えば  $xyz$  の各軸の  $\pm$  方向から 6 本入れる方法 (最も一般的に行われている) や正四面体の頂点から中心に向けて 4 本入れる方法などである。

#### 3.1 ドップラー限界温度

光モラセスにおける冷却機構は上に述べた通りだが原子に共鳴に近い光をあてることは加熱の作用もあるため冷却温度には限界がある。

##### 3.1.1 ランダムウォークによる加熱

1 次元のランダムウォークとは次のようなものである。  $x$  軸上原点を出発しサイコロを振るごとにサイコロの目が偶数なら +1、奇数なら -1 だけ  $x$  軸上を移動する。  $n$  回サイコロを振ったのちに

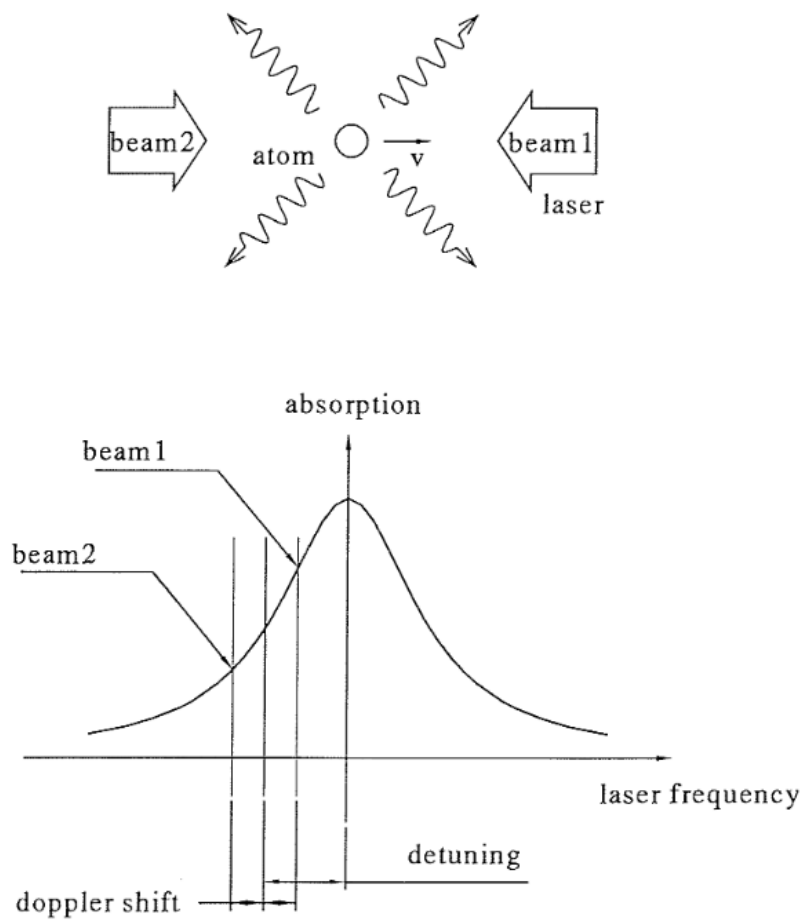


図 5: 1次元の光モラセス

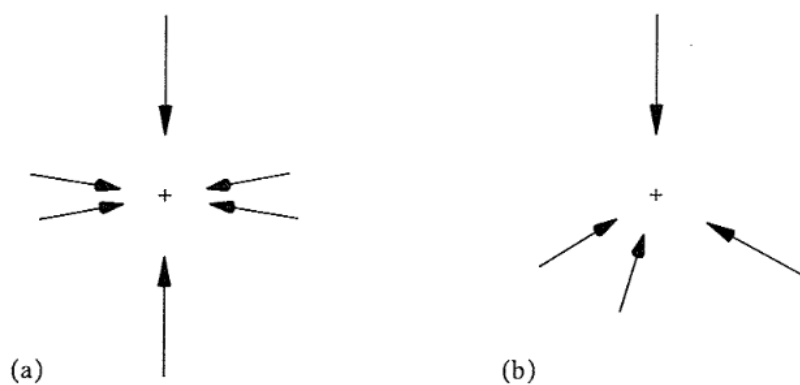


図 6: 3次元の光モラセスのための光の入れ方

いる位置  $x$  の 2 乗の期待値はいくつだろうか ( $x$  の期待値  $\bar{x}$  は 0 である)。

$n$  回目にサイコロを振ったときの移動量を  $\Delta x_n$  とすると

$$x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n \quad (7)$$

$(\Delta x_i)^2 = 1$  と  $i \neq j$  なら  $\overline{\Delta x_i \Delta x_j} = 0$  使うと

$$\overline{x^2} = \sum_i (\overline{\Delta x_i})^2 + \sum_{i \neq j} \overline{\Delta x_i \Delta x_j} = n \quad (8)$$

を得る。つまり  $\overline{x^2}$  はサイコロを振るごとに 1 だけ増えていく。

共鳴光にさらされた原子も自然放出により運動量空間をランダムウォークすると考えられる。静止状態からスタートし  $n$  回の光子の自然放出後の運動量を  $p$  とすると

$$p = \Delta p_1 + \Delta p_2 + \dots + \Delta p_n \quad (9)$$

$\Delta p_i = \pm \hbar k$  なので

$$\overline{p^2} = n \hbar^2 k^2 \quad (10)$$

運動エネルギーの期待値は

$$\overline{E} = n \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = n E_{recoil} \quad (11)$$

となる。自然放出がおきる頻度 (単位時間あたり回数) を  $\gamma$  とすると時間  $\Delta t$  でのエネルギー上昇 (加熱)  $\Delta E_{heating}$  は

$$\Delta E_{heating} = E_{recoil} \gamma \Delta t \quad (12)$$

となる。既述のように飽和強度より十分に強い共鳴光があたっているとき  $\gamma = \Gamma/2$  である。

光モラセスの冷却速度は原子の速度が下がってくるにつれて (対向するビームの光子吸収率の差が小さくなるので) 低下する一方加熱速度  $P_{heating}$  は (ほぼ) 一定なのであるところで釣り合う:

$$\Delta E_{cooling} + \Delta E_{heating} = 0 \quad (13)$$

1 次元光モラセスにおいて左右から角振動数  $\omega$  の光があたっているとき (6) と (12) において  $\gamma = \gamma(\omega)$  とおいた式を代入すると

$$E_{kinetic} = \frac{\hbar}{4} \frac{\gamma(\omega)}{\gamma'(\omega)} \quad (14)$$

を得る。線幅  $\Gamma$  のローレンツ型吸収スペクトル (共鳴角振動数  $\omega_0$ )

$$\gamma(\omega) = \frac{\alpha}{(\omega - \omega_0)^2 + (\frac{\Gamma}{2})^2} \quad (15)$$

を仮定すると (14) の左辺に現れる  $\gamma(\omega)/\gamma'(\omega)$  は  $\Delta\omega = \omega - \omega_0 = -\Gamma/2$  で最小値  $\Gamma/2$  を取るのでそのとき  $E_{kinetic}$  は最小となりその値は  $\hbar\Gamma/8$  である。この温度 (最小温度) をドップラー限界温度といいより精密な見積もりでは

$$k_B T_{doppler} = E_{kinetic} = \hbar \frac{\Gamma}{2} \quad (16)$$

となることが知られている。

## 4 磁気光学トラップ

### 4.1 四重極磁場

$z$  軸を中心する円環コイルを  $xy$  平面を挟んで対称に配置し、大きさが等しく逆向きの電流を流したときに原点近傍にできる磁場を考える。 $\nabla \times \mathbf{B} = 0$  だからスカラー関数  $\phi$  を使って磁場は  $\mathbf{B} = \nabla\phi$  と書ける。 $\mathbf{B}(0,0,0) = 0$  だから  $\phi$  の最低次は

$$\phi(x, y, z) = \alpha(x^2 + y^2) + \beta z^2 \quad (17)$$

と書けるだろう。従って

$$\mathbf{B}(x, y, z) = \nabla\phi(x, y, z) = 2(\alpha x, \alpha y, \beta z) \quad (18)$$

となるが  $0 = \nabla \cdot \mathbf{B} = 2(2\alpha + \beta)$  だから

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{2}\gamma \left( -\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + z^2 \right) \quad (19)$$

$$\mathbf{B}(x, y, z) = \gamma \left( -\frac{x}{2}, -\frac{y}{2}, z \right) \quad (20)$$

という形になる。

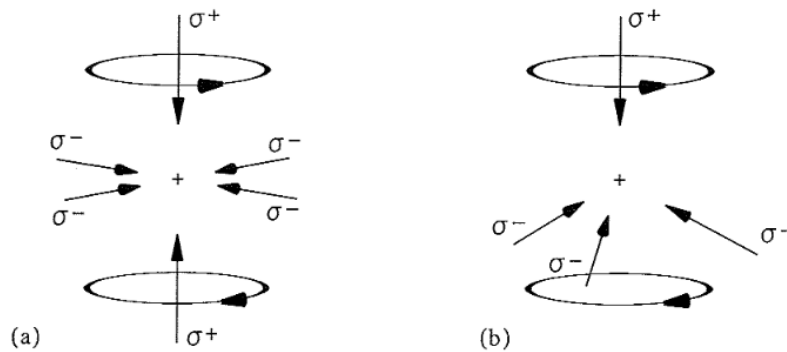


図 7: 四重極磁場を作るコイルと磁気光学トラップの光の入れ方

### 4.2 磁気光学トラップの 1 次元での説明

この四重極磁場に加えて  $z$  軸の正負方向から  $\sigma^+$  の円偏光の負に離調した光が入射している状況を  $z$  軸上で考える (円偏光の向きは光の進行方向に対して電場が右ネジの向きに回転しているときを  $\sigma^+$  逆の場合を  $\sigma^-$  と呼ぶことにする)。

図 8 において右からの光は  $J = 0 \rightarrow J = -1$  の遷移を引き起こし左からの光は  $J = 0 \rightarrow J = +1$  の遷移を引き起こす。

座標原点より右 (正) 側に位置している原子は Zeeman シフトにより右からの光をより共鳴に近く感じるのでより多く吸収し、従って左向きの力を受ける。左 (負) 側に位置している原子が受ける力は反対向きでいずれの場合も原点に向かう復元力を受ける。



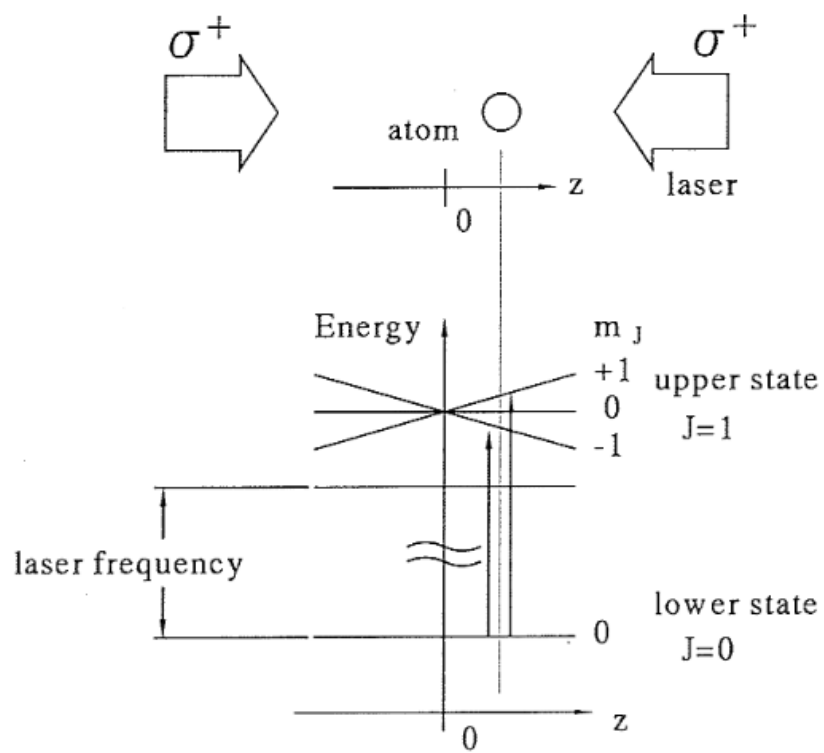


図 8: 磁気光学トラップ (1次元方向)

### 4.3 磁気光学トラップの3次元への拡張

3次元的な閉じ込めを実現するには通常図7の左の図のように  $xyz$  の各軸の正負方向から合計6本の光を入れ、そのうち  $z$  軸に沿った2本は  $\sigma^+$  偏光、残りの4本は  $\sigma^-$  偏光とする。  $xyz$  各軸上で復元力が働くことは今までの議論からわかるが一般の位置でもそうなることがわかっている。

また左の図のように入れる光を4本で済ますこともできる。

磁気光学トラップの更なる拡張として、磁場として四重極より高次の磁場を用いて光もより多くの本数の適切な偏光の光を入れるなどすればやはり原子の3次元の閉じ込めが実現できるのではないかと思うかも知れないが、これは不可能である。

## 5 双極子トラップ

中性原子を電界中に置くと双極子モーメントが誘起され原子は電場が強くなる方向へ引っ張られる。双極子トラップはこの力を利用した原子の捕捉方法である。静電場では電荷がない領域に電場の極大を作ることができないこと、共鳴に近い周波数の電場を用いると誘起双極子モーメントが増強される効果が利用できることなどから光電場を用いてトラップすることが一般的である。なお共鳴より高い周波数の光だと力の向きが反転し原子は光強度が小さい領域に引き寄せられる。双極子力は保存力なので双極子トラップ自体は冷却効果を持たないがレーザー冷却法と組み合わせて使われることが多いのでここで紹介しておく。

高強度の可視光レーザービームでは空気中のチリなどがビームに捉えられているのが観測されることがあるがこれも同じ原理である。

### 5.1 双極子力・双極子ポテンシャル

#### 5.1.1 静電場の場合

まず静電場の場合を論じる。不均一電場中の双極子は電場が大きくなる方向に力を受ける。これを定式化する。

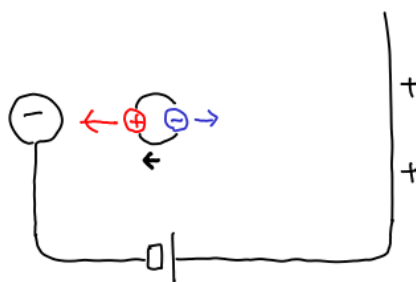


図 9: 双極子力

外場の働いていない原子の電荷分布は重心に対して反転対称性を持つが、電場を加えると分極する。このモデルとして電荷  $-q$ (電子・位置  $r_e$ ) と電荷  $+q$ (原子核・位置  $r_n$ ) が長さ  $0$  のバネ (バネ

定数  $k$ ) でつながれているものを考える。前者の后者に対する相対位置ベクトルを  $\mathbf{r}(= \mathbf{r}_e - \mathbf{r}_n)$  とすると

$$\mathbf{d} = -q\mathbf{r} \quad (21)$$

を双極子モーメントと呼ぶ (一般には  $\rho(\mathbf{r})$  を電荷分布として

$$\mathbf{d} = \int \rho(\mathbf{r})\mathbf{r}d\mathbf{r} \quad (22)$$

である)。均一な静電場  $\mathbf{E}$  が加わったときの両者の距離  $r$  に対して力の釣り合いの式  $kr = -qE$  が成り立つから

$$\mathbf{d} = \frac{q^2\mathbf{E}}{k} = \frac{q^2}{m\omega_0^2}\mathbf{E} = \alpha_0\mathbf{E} \quad (23)$$

ここで  $m$  は換算質量、 $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  は固有角振動数で比例定数  $\alpha_0(= q^2/m\omega_0^2)$  は分極率と呼ばれる。

均一な静電場の場合 2 つの電荷に働く力は同じ大きさで向きが反対だから双極子全体に働く力は 0 である。一般の静電場の場合原子の重心を  $\mathbf{R}$  とすると原子全体に加わる力は

$$\mathbf{F}(\mathbf{R}) = -q\{\mathbf{E}(\mathbf{r}_e) - \mathbf{E}(\mathbf{r}_n)\} = -q\mathbf{r} \cdot \nabla\mathbf{E}(\mathbf{R}) = \mathbf{d} \cdot \nabla\mathbf{E}(\mathbf{R}) = \alpha_0\mathbf{E} \cdot \nabla\mathbf{E}(\mathbf{R}) \quad (24)$$

静電場に対しては  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$  だから  $\partial_i E_j = \partial_j E_i$ 、 $F_i = \sum_j \alpha_0 E_j \partial_j E_i = \sum_j \alpha_0 E_j \partial_i E_j = \partial_i (\sum_j \alpha_0 E_j E_j)/2$ 、つまり

$$\mathbf{F}(\mathbf{R}) = -\nabla \left( -\frac{1}{2}\alpha_0 |\mathbf{E}(\mathbf{R})|^2 \right) \quad (25)$$

だから力  $\mathbf{F}(\mathbf{R})$  はポテンシャルエネルギー

$$V(\mathbf{R}) = -\frac{1}{2}\alpha_0 |\mathbf{E}(\mathbf{R})|^2 \quad (26)$$

から  $\mathbf{F}(\mathbf{R}) = -\nabla V(\mathbf{R})$  と導かれ、ポテンシャルエネルギーは電場の 2 乗に比例する。通常このポテンシャルは浅く原子等の運動状態を制御するには小さすぎるので共鳴効果を利用するために静電場の代わりに AC 電磁場 (光など) を用いる。

### 5.1.2 AC 電磁場

計算の簡略化のため原子核は相対的に非常に重いとする ( $\mathbf{r}_n = \mathbf{R}$ 、 $\mathbf{r}_e = \mathbf{R} + \mathbf{r}$ )。

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -m\omega_0^2\mathbf{r} - q\mathbf{E} - q\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} \quad (27)$$

時間的に変動する電磁場 (AC 電磁場) を考える。適当な散逸機構があるとして斉次項 (外場無しでもいつまでも振動する項) は考えない。従って外場を弱くしていったとき  $\mathbf{r}$  は外場とともに小さくなる。そこで右辺第 3 項 (磁場に比例する項・Lorentz 力) は相対的に更に弱くなるので今は無視する：

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -m\omega_0^2\mathbf{r} - q\mathbf{E}(\mathbf{R} + \mathbf{r}, t) \sim -m\omega_0^2\mathbf{r} - q\mathbf{E}(\mathbf{R}, t) \quad (28)$$

以下場は角振動数  $\omega$  で単振動しているとする

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{R}) \cos \omega t \quad (29)$$

仮定より  $r$  の時間依存性は  $r_0 \cos \omega t$  という形をしているので  $\dot{r} = -\omega^2 r$  だから

$$\mathbf{r} = -\frac{q}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \mathbf{E}(\mathbf{R}) \quad (30)$$

$$\mathbf{d} = -q\mathbf{r} = \frac{q^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \mathbf{E}(\mathbf{R}) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \alpha_0 \mathbf{E}(\mathbf{R}) = \alpha \mathbf{E}(\mathbf{R}) \quad (31)$$

$$\alpha = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \alpha_0 \quad (32)$$

となり双極子モーメントや分極率は静電場の場合と比べて共鳴因子  $\omega_0^2/(\omega_0^2 - \omega^2)$  だけ増強される。  
 $\omega > \omega_0$  になると分極率の符号が反転し原子は電場が強いところを避けるようになる。

$\delta\omega \equiv \omega_0 - \omega$  と置き  $|\delta\omega| \ll \omega_0$  ならばこの因子は  $\sim \frac{1}{2} \frac{\omega_0}{\delta\omega}$  である。ただし  $\delta\omega$  を自然幅  $\Gamma$  より十分に大きくとらないと実励起に伴っておきる自然放出による加熱が無視できなくなる。

### 5.1.3 計算の精密化

双極子にかかる力は Lorentz 力も含めると

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -q\mathbf{E}(\mathbf{R} + \mathbf{r}, t) + q\mathbf{E}(\mathbf{R}, t) - q\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}(\mathbf{R} + \mathbf{r}, t) \\ &\sim -q\mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{E}(\mathbf{R}, t) - q\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}(\mathbf{R}, t) \\ &= \mathbf{d} \cdot \nabla \mathbf{E}(\mathbf{R}, t) + \dot{\mathbf{d}} \times \mathbf{B}(\mathbf{R}, t) \\ &= \alpha \{ \mathbf{E} \cdot \nabla \mathbf{E} + \dot{\mathbf{E}} \times \mathbf{B} \} \end{aligned} \quad (33)$$

これからこの力について場の振動周期にわたる平均をとるが時間平均についての公式  $\overline{\dot{\mathbf{E}} \times \mathbf{B}} = -\mathbf{E} \times \overline{\dot{\mathbf{B}}}$  (付録参照) を使い、さらに  $\dot{\mathbf{B}} = -\nabla \times \mathbf{E}$  を用いると  $\overline{\dot{\mathbf{E}} \times \mathbf{B}} = \overline{\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})}$ 。この右辺の各成分は  $[\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})]_i = \sum_{jklm} \epsilon_{ijk} E_j \epsilon_{klm} \partial_l E_m = \sum_{jlm} (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) E_j \partial_l E_m = \sum_j E_j (\partial_i E_j - \partial_j E_i) = [\nabla |\mathbf{E}|^2 / 2 - (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E}]_i$  となるから (33) の時間平均を取ることにより

$$\overline{\mathbf{F}} = -\nabla \left( -\frac{1}{2} \alpha \overline{|\mathbf{E}|^2} \right) \quad (34)$$

従って静電場のポテンシャルの公式において置き換え操作  $\alpha_0 \rightarrow \alpha$  を行ない  $|\mathbf{E}|^2$  の時間平均を取ったものと同じ式を得る。

### 5.1.4 付録

一般に発散しない量  $f(t)$  の時間微分の時間平均は 0 である：

$$\overline{\dot{f}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \dot{f}(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} [f(T) - f(0)] = 0 \quad (35)$$

従って

$$\overline{g\dot{h}} = -\overline{\dot{g}h} \quad (36)$$