量子光学の基礎の基礎 森永@ils/uec (2019)

量子光学についての標準的な教科書は
Rodney Loudon 「光の量子論」 第 2 版 (1994/06) 内田老鶴圃

0　光子数状態

a を消滅演算子としたときに $a^\dagger a$（数演算子と呼ばれる）の固有状態を光子数状態といい固有値（非負の整数）を光子数と呼ぶ。

$$a^\dagger a|n\rangle = n|n\rangle$$

のように整数値を連想させる文字 n や m が使われることが多い。
光子数状態は確定した光強度を持つ（強度ゆらぎが 0)。
以下ではあらかじめ

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

となるように光子数状態間の位相を選んでおく。従って

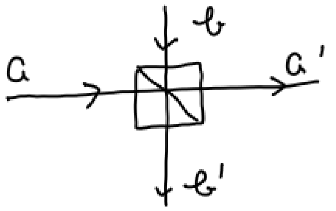
$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}a^{\dagger n}|0\rangle$$

である。

1　ビームスプリッタ

ビームスプリッタ（半透鏡）で合わされる 2 つのモードの消滅演算子をそれぞれ a と b とする ($[a, a^\dagger] = 1$、$[b, b^\dagger] = 1$ で a、$a^\dagger$ と b、$b^\dagger$ は互いに交換する)。



ビームスプリッタの相互作用ハミルトニアン H_{BS} は次のような形をしているだろう：

$$H_{BS} = \gamma ab^\dagger + \gamma^* a^\dagger b$$

ビームスプリッタによるユニタリ変換は $U_{BS} = \exp(\frac{t}{i\hbar}H_{BS}) = \exp(\beta ab^\dagger - \beta^* a^\dagger b)$ であり（$\beta = \frac{\gamma t}{i\hbar}$）状態 $|\ \rangle$ はビームスプリッタを通ると $U_{BS}|\ \rangle$ へと変換される。$a' \equiv U_{BS} a U_{BS}^\dagger$、$b' \equiv U_{BS} b U_{BS}^\dagger$ を計算しよう。$U_s = \exp(s(\beta ab^\dagger - \beta^* a^\dagger b))$、$a_s = U_s a U_s^\dagger$ とおくと

$$\frac{da_s}{ds} = -U_s[a, \beta ab^\dagger - \beta^* a^\dagger b]U_s^\dagger = \beta^* U_s b U_s^\dagger = \beta^* b_s$$

$$\frac{db_s}{ds} = -U_s[b, \beta ab^\dagger - \beta^* a^\dagger b]U_s^\dagger = -\beta U_s a U_s^\dagger = -\beta a_s$$

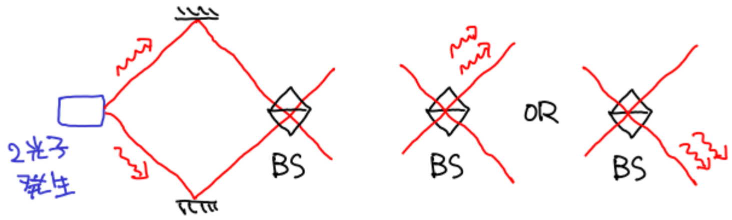
これより $\frac{d^2a_s}{ds^2} = -|\beta|^2 a_s$、$\frac{d^2b_s}{ds^2} = -|\beta|^2 b_s$ を得るから $a_s = \cos(|\beta|s)\, a + \frac{\beta^*}{|\beta|}\sin(|\beta|s)\, b$、$b_s = -\frac{\beta}{|\beta|}\sin(|\beta|s)\, a + \cos(|\beta|s)\, b$ となり、$s = 1$ と置くことにより

$$\begin{cases} a' = & t\, a + r\, b \\ b' = & -r^*\, a + t^*\, b \end{cases}$$

を得る。ただし $t = \cos|\beta|$、$r = \frac{\beta^*}{|\beta|}\sin|\beta|$。

1.1 【応用】Hong-Ou-Mandel 効果

光子対をビームスプリッタに入射させる：



出てくる状態は $U_{BS}|11\rangle = U_{BS}a^\dagger b^\dagger|00\rangle = U_{BS}a^\dagger U_{BS}^\dagger U_{BS} b^\dagger U_{BS}^\dagger U_{BS}|00\rangle = a'^\dagger b'^\dagger|00\rangle$ であるが（$U_{BS}|00\rangle = |00\rangle$ に注意）

$$a'^\dagger b'^\dagger|00\rangle = (t^*\, a^\dagger + r^*\, b^\dagger)(-r\, a^\dagger + t\, b^\dagger)|00\rangle = \sqrt{2}(-t^* r|20\rangle + tr^*|02\rangle) + (|t|^2 - |r|^2)|11\rangle$$

なので、50%-50%のビームスプリッタ（$|t|^2 = |r|^2 = \frac{1}{2}$ ）の場合別々の入口からビームスプリッタに 1 つずつ入った光子は必ずどちらかの出口に 2 つ一緒に出てくる。

2 コヒーレント状態

消滅演算子の固有状態のことをコヒーレント状態という[1]：

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \tag{1}$$

このようにギリシャ文字 α、β などが使われることが多く、文字の種類で光子数状態と識別する（$|0\rangle$ は光子数状態と見てもコヒーレント状態と見ても同じ状態で真空状態と呼ばれ光子が一つもない）。$U_\alpha \equiv \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)$ と定義し ($U_\alpha^\dagger = U_{-\alpha} = U_\alpha^{-1}$ に注意) 実変数 s について $f(s) = U_{\alpha s}^\dagger a U_{\alpha s}$ とおくと $f'(s) = U_{\alpha s}^\dagger [a, \alpha a^\dagger - \alpha^* a] U_{\alpha s} = \alpha$ なので $f(s) = f(0) + \alpha s = a + \alpha s$ つまり

$$U_\alpha^\dagger a U_\alpha = f(1) = a + \alpha \tag{2}$$

$aU_\alpha|0\rangle = U_\alpha U_\alpha^\dagger a U_\alpha|0\rangle = U_\alpha(a+\alpha)|0\rangle = \alpha U_\alpha|0\rangle$ であるから (グローバル位相の不定性を除けば)

$$U_\alpha|0\rangle = |\alpha\rangle \tag{3}$$

となる。

A と B は演算子で交換子 $[A, B]$ は A、B と交換するとする。$g(s) = e^{sA}Be^{-sA}$ とおくと $g'(s) = e^{sA}[A, B]e^{-sA} = [A, B]$、$g(0) = B$ だから $e^{sA}Be^{-sA} = g(s) = B + s[A, B]$ である。$h(s) = e^{-\frac{1}{2}s^2[A,B]}e^{sA}e^{sB}$ とおくと $h(0) = 1$ で

$$\begin{aligned} h'(s) &= -s[A, B]h(s) + Ah(s) + e^{\frac{1}{2}s^2[A,B]}e^{sA}Be^{sB} \\ &= (A + B)h(s) \end{aligned} \tag{4}$$

[1] レーザー（特に高 Q 値の共振器を持つもの）の光子状態はコヒーレント状態にあると考えられている。

だから $h(s)=e^{s(A+B)}$ となり

$$e^{A+B}=h(1)=e^{-\frac{1}{2}[A,B]}e^Ae^B \tag{5}$$

$A=\alpha a^\dagger$、$B=-\alpha^* a$ とおくと $-\frac{1}{2}[A,B]=-\frac{1}{2}|\alpha|^2$ なので

$$\begin{aligned}|\alpha\rangle &= U_\alpha|0\rangle \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}e^{\alpha a^\dagger}e^{-\alpha^* a}|0\rangle \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}e^{\alpha a^\dagger}|0\rangle \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n a^{\dagger n}}{n!}|0\rangle \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle\end{aligned} \tag{6}$$

2.1 コヒーレント状態間の内積

$$\langle\beta|\alpha\rangle=\langle 0|U_{-\beta}U_\alpha|0\rangle$$

$U_\alpha=e^A$、$A=\alpha a^\dagger-\alpha^* a$
$U_\beta=e^B$、$B=\beta a^\dagger-\beta^* a$
$U_{\alpha-\beta}=e^{A-B}=e^{-\frac{1}{2}[A,B]}e^{-B}e^A=e^{-\frac{1}{2}[A,B]}U_{-\beta}U_\alpha$
$[A,B]=\alpha\beta^*-\alpha^*\beta$

$$\langle\beta|\alpha\rangle=e^{\frac{1}{2}(\alpha\beta^*-\alpha^*\beta)}\langle 0|U_{\alpha-\beta}|0\rangle=e^{\frac{1}{2}(\alpha\beta^*-\alpha^*\beta)}\langle 0|\exp(\gamma a^\dagger-\gamma^* a)|0\rangle$$

($\gamma=\alpha-\beta$)
$A=\gamma a^\dagger$、$B=-\gamma^* a$、$[A,B]=|\gamma|^2$
$\exp(\gamma a^\dagger-\gamma^* a)=e^{-\frac{1}{2}|\gamma|^2}e^{\gamma a^\dagger}e^{-\gamma^* a}$
$\langle 0|\exp(\gamma a^\dagger-\gamma^* a)|0\rangle=e^{-\frac{1}{2}|\gamma|^2}$
$|\gamma|^2=|\alpha|^2+|\beta|^2-\alpha\beta^*-\alpha^*\beta$

$$\langle\beta|\alpha\rangle=e^{-\frac{1}{2}(|\gamma|^2+\alpha\beta^*-\alpha^*\beta)}=e^{-\frac{1}{2}(|\alpha-\beta|^2+\alpha\beta^*-\alpha^*\beta)}=e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2+|\beta|^2)+\alpha\beta^*}$$

$$|\langle\beta|\alpha\rangle|^2=e^{-|\gamma|^2}=e^{-|\alpha-\beta|^2}$$

2.1.1 検算

(6) より

$$\langle\beta|\alpha\rangle=e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2+|\beta|^2)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha\beta^*)^n}{n!}=e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2+|\beta|^2)+\alpha\beta^*}$$

2.2 コヒーレント状態の強度ゆらぎ

(ハイゼンベルグ描像)
電場(のある偏光成分)E は一つのモードだけ抽出し係数等を無視すると[2]そのモードの消滅演算子 a_t を使って

$$E_t=\frac{1}{\sqrt{2}}(a_t+a_t^\dagger)$$

[2]ここでは電場の 2 乗の期待値が光子数に対応するように係数を取ってある。

と書け[3]、また電磁場のハミルトニアンは

$$H_0 = \hbar\omega\left(a_t^\dagger a_t + \frac{1}{2}\right)$$

という形をしている。そこで消滅演算子 a_t の時間発展は

$$i\hbar\frac{da_t}{dt} = [a_t, H_0] = \hbar\omega\, a_t$$

で与えられるので $a_t = e^{-i\omega t}a$ である（a はシュレーディンガー描像での消滅演算子）。コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ による電場の期待値は

$$\langle E_t\rangle = \langle\alpha|E_t|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha e^{-i\omega t} + \alpha^* e^{i\omega t}) = \sqrt{2}|\alpha|\cos(\omega t - \phi)$$

となる（ただし $\alpha = |\alpha|e^{i\phi}$ とした）。更に

$$\langle E_t^2\rangle = \langle\alpha|E_t^2|\alpha\rangle = \frac{1}{2}\langle\alpha|(a_t + a_t^\dagger)^2|\alpha\rangle = \frac{1}{2}(\alpha e^{-i\omega t} + \alpha^* e^{i\omega t})^2 + 1 = \langle E_t\rangle^2 + 1$$

であるから電場のゆらぎは $\Delta E_t = \sqrt{\langle E_t^2\rangle - \langle E_t\rangle^2} = 1$ であり、従ってコヒーレント状態には α の値によらず常に一定の（電場振幅の）ゆらぎが存在する。

通常の光検出器で検出できるのは電場の 2 乗でありかつ光周波数には応答しないので、電場を

$$E_t = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_t + a_t^\dagger) = E_t^{(+)} + E_t^{(-)}$$

と正負の周波数成分に分けたとき測定されるのは結局 $I_t = 2E_t^{(-)}E_t^{(+)} = a_t^\dagger a_t = a^\dagger a$ である[4]。

$$\langle I_t\rangle = \langle\alpha|a^\dagger a|\alpha\rangle = \langle\alpha|a^\dagger a|\alpha\rangle = |\alpha|^2$$

$$\langle I_t^2\rangle = \langle\alpha|a^\dagger a a^\dagger a|\alpha\rangle = \langle\alpha|(a^{\dagger 2}a^2 + a^\dagger a)|\alpha\rangle = |\alpha|^2(|\alpha|^2 + 1)$$

$$\Delta I_t = \sqrt{\langle I_t^2\rangle - \langle I_t\rangle^2} = |\alpha| = \sqrt{\langle I_t\rangle}$$

3　スクイーズド状態

コヒーレント状態は常に一定の電場ゆらぎを持っている。電場ゆらぎを定常的にこれより小さくすることはできないが、あるタイミングで小さくなるような状態を作ることはできる（そして他のタイミングではゆらぎはより大きくなる）。これがスクイーズド状態である。

a を消滅演算子とし (つまり $[a, a^\dagger] = 1$) 次のような形のハミルトニアンを考える：

$$H_{SQ} = \frac{1}{2}(\eta a^2 + \eta^* a^{\dagger 2})$$

これは 2 次の非線形結晶を角振動数 2ω の強い光（古典光・振幅 η）で励起したときに角振動数 ω の光子対が発生する過程を記述する。対応するユニタリ変換は $U_{SQ} = \exp\left(\frac{t}{i\hbar}H_{SQ}\right) = \exp(-\frac{1}{2}(\epsilon a^2 - \epsilon^* a^{\dagger 2}))$ である ($\epsilon = i\frac{\eta t}{\hbar}$)。$a_{SQ} \equiv U_{SQ}^\dagger a\, U_{SQ}$ とおき、さらにこれを求めるために $U_s = \exp(-\frac{s}{2}(\epsilon a^2 - \epsilon^* a^{\dagger 2}))$、$a_s = U_s^\dagger a\, U_s$ と定義する。

$$\frac{da_s}{ds} = U_s^\dagger\left[a, -\frac{1}{2}\left(\epsilon a^2 - \epsilon^* a^{\dagger 2}\right)\right]U_s = \epsilon^* U_s^\dagger a^\dagger U_s = \epsilon^* a_s^\dagger$$

---

[3]調和振動子との対応では電場は「座標」に対応するので消滅演算子と生成演算子の和で表される。

[4]電場の単純な 2 乗平均に対応するのは $I_t = E_t^{(-)}E_t^{(+)} + E_t^{(+)}E_t^{(-)} = \frac{1}{2}(a^\dagger a + a a^\dagger)$ なのだが真空場（光子が一つも存在しない状態）に対して 0 になるように定数項を引いている（正規順序積）。

これとこれのエルミート共役を取った $\frac{da_s^\dagger}{ds} = \epsilon a_s$ と併せて $\frac{d^2 a_s}{ds^2} = |\epsilon|^2 a_s$ となるから

$$a_s = \cosh(|\epsilon| s)\ a + \frac{\epsilon^*}{|\epsilon|} \sinh(|\epsilon| s)\ a^\dagger$$

を得る。$s = 1$ とおいて

$$a_{SQ} = \mu a + \nu a^\dagger$$

$\mu = \cosh|\epsilon|,\ \nu = \frac{\epsilon^*}{|\epsilon|} \sinh|\epsilon|$ を得る。もちろん $[a_{SQ}, a_{SQ}^\dagger] = |\mu|^2 - |\nu|^2 = 1$ である。

$|\alpha_{SQ}\rangle = U_{SQ}|\alpha\rangle$（←スクイーズド状態と呼ばれる）としてこれに対する電場等の期待値を計算する。

$$\begin{aligned}
\langle E_t \rangle &= \langle \alpha_{SQ}|E_t|\alpha_{SQ}\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \alpha|U_{SQ}^\dagger (a e^{-i\omega t} + a^\dagger e^{i\omega t}) U_{SQ}|\alpha\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \alpha|(\mu a + \nu a^\dagger) e^{-i\omega t} + (\mu^* a^\dagger + \nu^* a) e^{i\omega t}|\alpha\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha' e^{-i\omega t} + \alpha'^* e^{i\omega t}) \\
&= \sqrt{2} |\alpha'| \cos(\omega t - \phi')
\end{aligned}$$

となる（ただし $\alpha' = \mu\alpha + \nu\alpha^*$、$\alpha' = |\alpha'| e^{i\phi'}$ とした）。更に

$$\begin{aligned}
\langle E_t^2 \rangle &= \langle \alpha_{SQ}|E_t^2|\alpha_{SQ}\rangle \\
&= \frac{1}{2} \langle \alpha|(a_t + a_t^\dagger)^2|\alpha\rangle \\
&= \frac{1}{2} \langle \alpha|U_{SQ}^\dagger (a e^{-i\omega t} + a^\dagger e^{i\omega t})^2 U_{SQ}|\alpha\rangle \\
&= \frac{1}{2} \langle \alpha|\{(\mu a + \nu a^\dagger) e^{-i\omega t} + (\mu^* a^\dagger + \nu^* a) e^{i\omega t}\}^2|\alpha\rangle \\
&= \frac{1}{2} \langle \alpha| : \{(\mu a + \nu a^\dagger) e^{-i\omega t} + (\mu^* a^\dagger + \nu^* a) e^{i\omega t}\}^2 : + (\mu e^{-i\omega t} + \nu^* e^{i\omega t})(\mu^* e^{i\omega t} + \nu e^{-i\omega t})|\alpha\rangle \\
&= \langle E_t \rangle^2 + |\mu e^{-i\omega t} + \nu^* e^{i\omega t}|^2 \\
&= \langle E_t \rangle^2 + |\mu|^2 + |\nu|^2 + 2|\mu\nu| \cos(2\omega t - \theta)
\end{aligned}$$

ここで記号 :: は正規順序積と呼ばれ生成消滅演算子の積の順序を消滅演算子が生成演算子の右側に来るように並べ替える手続きを表す[5]。また θ は $\mu\nu = |\mu\nu| e^{i\theta}$ で与えられる。これからわかるように電場のゆらぎは $\Delta E_t = \sqrt{\langle E_t \rangle^2 - \langle E_t \rangle^2} = \sqrt{|\mu|^2 + |\nu|^2 + 2|\mu\nu| \cos(2\omega t - \theta)}$ であるからこれは最小値 $|\mu| - |\nu|$ と最大値 $|\mu| + |\nu|$ の間を角速度 2ω で行き来する。最小値は原理的にはいくらでも小さくすることができる。位相角 θ を選ぶことによって電場のゆらぎが最小になるタイミングと電場振幅の位相を調整することができる[6]。

[5] 2 次の場合を書き下すと : $a^2 := a^2,\ : a^{\dagger 2} := a^{\dagger 2},\ : a a^\dagger := a^\dagger a,\ : a^\dagger a := a^\dagger a$ である。$f(\ ,\ )$ を多項式とすると $\langle \alpha| : f(a, a^\dagger) : |\alpha\rangle = f(\alpha, \alpha^*)$ となる。

[6] θ を変えると ϕ' や $|\alpha'|$ も変わるので実際にはまったく自由に調整できるわけではない。